

文章编号 1004-924X(2009)03-0570-06

# 深切口椭圆柔性铰链

陈贵敏, 韩 琪

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

**摘要:**提出了一类椭圆柔性铰链——深切口椭圆柔性铰链,其切口的宽度为椭圆的短半轴,而切口的深度为椭圆的长半轴。基于材料力学中的变截面梁的弯曲理论,通过引入离心角作为积分变量,推导出了这类柔性铰链的转角、转动精度和最大应力的解析计算公式。这些公式简洁、规范,可用于工程设计中的计算和分析。用有限元分析软件 ANSYS 分析了多个不同尺寸的椭圆柔性铰链,分析结果与解析计算公式的计算结果吻合得很好。其中转角的最大误差不超过 4%,最大应力的最大误差不超过 5%,转动精度的最大误差不超过 7%,说明了这些解析计算公式的正确性。分析结果也表明,这类铰链非常适合于要求高精度传动的应用场合。

**关键词:**椭圆柔性铰链;柔度;转动精度;有限元法

**中图分类号:**TH132 **文献标识码:**A

## Deep-notch elliptical flexure hinges

CHEN Gui-min, HAN Qi

(School of Mechatronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** A kind of elliptical flexure hinge named deep-notch elliptical flexure hinge was proposed by taking notch width as the length of minor axis and notch depth as the length of long axis for an ellipse. Based on the bending theory of beam with variable cross-section in material mechanics, the integral formula of the elliptical flexure hinge was deduced by inducing centrifugal angle as the integral variable. By defining an intermediate parameter in the integral formula, more concise analytical equations of compliance, rotation precision and maximum stress of elliptical flexure hinges were deduced to avoid time-consuming numerical integrals. A number of elliptical flexure hinges with different shapes were analyzed by using ANSYS finite element software. The analysis results are coincident with that of analytical formula well. Where, the maximum errors of angular displacement, maximum stress and rotation precision are less than 4%, 5% and 7%, respectively. These data indicate that the analytical equations are correct and also show that deep-notch elliptical hinge is a good choice for high precision transmission.

**Key words:** elliptical flexure hinge; compliance; rotation precision; finite element method

收稿日期:2008-05-12;修订日期:2008-06-10.

基金项目:中国博士后科学基金资助项目(No. 20070421110);国家 863 高技术研究发展计划资助项目(No. 2002AA862011);国家自然科学基金青年基金资助项目(No. 50805110);教育部科学技术研究重点资助项目(No. 109145)

## 1 引言

柔性铰链作为一种小体积、无机械摩擦、无间隙和高灵敏度的传动结构,被广泛应用于各种要求小角位移、高精度传动的场合,如微夹钳机构<sup>[1]</sup>、微动操作台<sup>[2-4]</sup>等。近年来,柔性铰链又受到光学领域研究人员的青睐,相关的应用比比皆是,如光学元件的调整座<sup>[4]</sup>、同步辐射的角度微调装置<sup>[5]</sup>、光学自动调焦机构<sup>[6]</sup>等。

最初出现的柔性铰链有两种:直梁型柔性铰链和圆弧型柔性铰链。直梁型柔性铰链有较大的转动范围,但运动精度较差;而圆弧型柔性铰链的运动精度较高,但转动范围相对较小。为了兼顾运动精度和运动范围,有学者提出了椭圆型柔性铰链<sup>[9]</sup>、导角型柔性铰链、抛物线型柔性铰链和双曲线型柔性铰链<sup>[10]</sup>。早在1965年,PAROS等便给出了圆弧型柔性铰链的简化计算公式<sup>[11]</sup>,但是,时至今日,其他形式的柔性铰链的设计计算仍然十分复杂,工程设计中普遍采用数值积分方法和有限元方法。

Smith等人<sup>[9]</sup>以及笔者<sup>[12]</sup>对椭圆柔性铰链进行了较为全面的研究,但是,这些研究都是在将椭圆的长轴作为切口宽度的前提下进行的,这样可以使铰链获得更大的柔度,非常适合于要求大行程的全柔性机构,然而,这类铰链的转动精度比较差。鉴于此,本文提出另一类椭圆柔性铰链—以椭圆的短轴为切口宽度,文中称其为“深切口椭圆柔性铰链”。

## 2 深切口椭圆柔性铰链

图1为深切口椭圆柔性铰链示意,对应椭圆的长半轴、短半轴分别为 $a$ 和 $b$  ( $a \geq b$ ),可以将直梁柔性铰链看作是 $a=b$ 的椭圆柔性铰链。

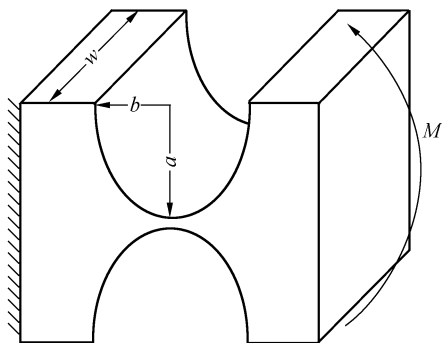


图1 深切口椭圆柔性铰链

Fig. 1 Elliptical flexure hinge of deep cutout

### 2.1 椭圆的离心角

以原点为圆心,分别以椭圆的长轴和短轴为直径作两个辅助圆,如图2所示。对于参数 $\phi$ , $\phi$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 内的取值与椭圆上的点存在着一一对应的关系,且从图2可看出,对椭圆上任一点 $P$ ,有

$$x_P = b \cos \phi, y_P = a \sin \phi (0 \leq \phi < 2\pi),$$

参数 $\phi$ 即为椭圆的离心角。

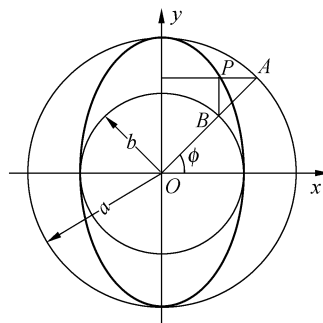


图2 椭圆离心角

Fig. 2 Eccentric angle of an ellipse

### 2.2 柔度特性

令铰链材料的弹性模量为 $E$ ,剪切弹性模量为 $G$ , $M(x)$ 为作用于微小段 $dx$ 的弯矩, $I(x)$ 为微小段 $dx$ 的断面对中心轴的惯性矩。将铰链的变形看作是由许多微小弯曲变形累积的结果,把每个微小段看作长度为 $dx$ 的矩形断面梁。根据材料力学,可得铰链中性面曲率半径:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (1)$$

由于曲线 $y=f(x)$ 上任意一点的曲率为:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (2)$$

将(2)代入(1)式,可得挠曲线的微分方程:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (3)$$

一般来说,铰链切口的尺寸较结构的其它尺寸小得多,可以认为弯矩变化很小,即可把  $M(x)$  视为常数。再加上柔性铰链变形很小,挠曲线非常平坦,  $dy/dx \ll 1$ , 式(3)可简化为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (4)$$

对式(4)进行一次积分,并考虑截面对中心轴的惯性矩  $I(x) = w \times h^3(x)/12$ , 即得到计算转角  $\theta$  的公式:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int \frac{12M}{Ew[h(x)]^3} dx. \quad (5)$$

下面通过引入离心角  $\phi$  来简化在  $\phi$  处截取的微元  $d\phi$ 。由于柔性铰链的变形主要集中在中间

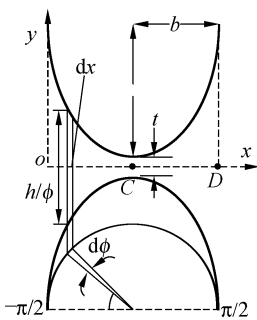


图 3 微元划分示意图

Fig. 3 Diagram of infinitesimal strip

较为薄弱的部分,可以忽略掉其余部分的转角,积分区间为  $O$  点到  $D$  点。由图 3 可知,对应  $\phi$  的取值范围为  $[-\pi/2, \pi/2]$ , 且有:

$$h(\phi) = 2a + t - 2a \cos \phi. \quad (6)$$

又由  $x = b + b \sin \phi$ , 有:

$$dx = b \cos \phi d\phi. \quad (7)$$

将式(6)、(7)代入式(5),得:

$$\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{12Mb \cos \phi}{Ew(2a + t - 2a \cos \phi)^3} d\phi = \frac{12Mb}{Ew} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \phi}{(2a + t - 2a \cos \phi)^3} d\phi, \quad (8)$$

令  $s = a/t$ , 可得到铰链的转角计算公式:

$$\theta = \frac{12Mb}{Ewt^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \phi}{(2s + 1 - 2s \cos \phi)^3} d\phi, \quad (9)$$

由于  $s > 0$ , 式(9)在 Mathematica 中的积分结果为

$$\theta = 24Ma\gamma_1/Ewt^3, \quad (10)$$

其中:

$$\gamma_1 = \frac{6s(2s+1)}{(4s+1)^{5/2}} \arctan \sqrt{4s+1} + \frac{6s^2+4s+1}{(2s+1)(4s+1)^{5/2}},$$

由式(10)可得铰链的柔度计算公式:

$$c = 1/k = \frac{\theta}{M} = 24a\gamma_1/Ewt^3. \quad (11)$$

### 2.3 精度特性

理想铰链应可以绕其中心点自由旋转,但是,对于真实的柔性铰链,要让它作旋转运动就必须施加变形力。然而,即使施加的力很小,也会导致铰链中心点偏离其几何中心,这就会影响柔性铰链的转动精度。为了“定量地”考察柔性铰链的精度,本文采用文献[10]中的方法:用切口中心  $C$  点处的挠度来表征铰链的精度。需要指出的是,  $C$  点的挠度并非精度的严格定义。铰链左端固定,因此,对转角  $\theta$  表达式(5)在区间  $[-\pi/2, 0]$  上积分,即得到  $C$  点的挠度:

$$v_C = \frac{12Mb}{Ewt^3} \int_{-\pi/2}^0 \left[ \int_{-\pi/2}^{\phi} \frac{\cos \beta}{(2s + 1 - 2s \cos \beta)^3} d\beta \right] \cdot b \cos \phi d\phi = \frac{6Mb^2}{Ewt^3} \cdot \frac{1}{1+2s}. \quad (12)$$

显然,对于铰链来说,转动精度与铰链的切口形状密切相关。

### 2.4 铰链的最大应力

由应力集中系数  $K_t$  的定义,在纯弯曲情况下,可以使用如下公式计算铰链的最大应力:

$$\sigma_{\max} = K_t \frac{6M}{t^2 w}, \quad (13)$$

其中  $M$  为所施加的弯矩。

显然,最大应力发生在厚度最小的截面处,且远离中性轴的上下两端,此处曲率半径记为  $r$ , 有<sup>[9]</sup>:

$$K_t = (1 + t/2r)^{9/20}, \quad (0 < t/2r < 2.3). \quad (14)$$

其中,椭圆的曲率可表示为:

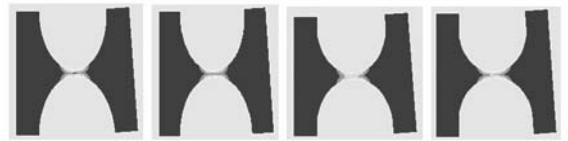
$$\frac{1}{r} = \frac{ab}{(b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \Big|_{\phi=\pi/2} = \frac{a}{b^2}.$$

因此有:

$$K_t = (1 + at/2b^2)^{9/20}. \quad (15)$$

### 3 实例计算与比较

椭圆柔性铰链的尺寸: $t=0.5\text{ mm}$ , $w=5\text{ mm}$ , $b=3\text{ mm}$ , $a$  依次取  $5\text{ mm}$ , $4.5\text{ mm}$ , $4\text{ mm}$ , $3.5\text{ mm}$ , $3\text{ mm}$ , $2\text{ mm}$  和  $1\text{ mm}$ ( $a$  取  $3\text{ mm}$ , 铰链就成为直圆柔性铰链);材料选用钛合金,其杨氏模量为  $110\text{ GPa}$ ,泊松比为  $0.33$ ;铰链的自由端作用弯矩  $M=0.02\text{ N}\cdot\text{m}$ 。为了验证解析公式的正确性,在 ANSYS 软件中选用 Shell63 单元(此单元的每个节点均具有六个自由度)对一系列的铰链进行有限元分析。有限元分析得到的变形图如图 4 所示;解析方法的计算结果和有限元方法计算结果见表 1。



(a)  $a=5.0\text{ mm}$  (b)  $a=4.5\text{ mm}$  (c)  $a=4.0\text{ mm}$  (d)  $a=3.5\text{ mm}$



(e)  $a=3.0\text{ mm}$  (f)  $a=2.0\text{ mm}$  (g)  $a=1.0\text{ mm}$

图 4 有限元分析结果

Fig. 4 Finite element results

表 1 解析方法与有限元方法的结果比较

Tab. 1 Comparison of analytical and FEM results

铰链类型	$a(\text{mm})$	解析计算结果			有限元分析结果		
		$\theta(\text{mrad})$	$v_c(\mu\text{m})$	$\sigma_{\max}(\text{MPa})$	$\theta(\text{mrad})$	$v_c(\mu\text{m})$	$\sigma_{\max}(\text{MPa})$
深切口椭圆铰链	5.0	3.851 9	0.748 05	101.8	3.776 2	0.804 87	99.2
	4.5	4.054 4	0.826 79	101.2	4.006 8	0.871 09	93.3
	4.0	4.292 5	0.924 06	100.7	4.215 3	0.995 30	92.5
	3.5	4.578 1	1.047 3	100.1	4.698 4	0.987 50	95.1
直圆铰链	3.0	4.929 3	1.208 4	99.5	4.988 0	1.285 4	94.2
椭圆铰链	2.0	5.970 6	1.745 5	98.4	6.176 3	1.850 7	94.1
	1.0	8.166 4	3.141 8	97.2	8.216 3	3.321 0	93.0

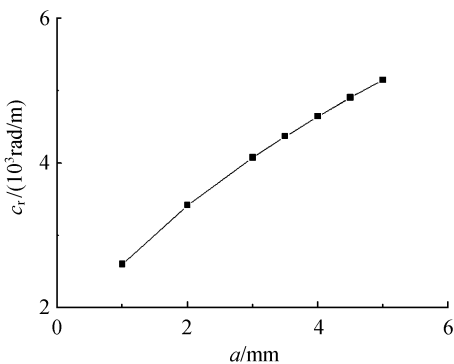


图 5 相对柔度曲线

Fig. 5 Curve of relative compliance

表 1 中的数据表明:解析方法和有限元方法的计算结果吻合得很好,其中  $\theta$  最大误差不超过  $4\%$ , $\sigma_{\max}$  最大误差不超过  $5\%$ , $v_c$  最大误差不超过  $7\%$ ,充分说明计算公式的正确性。需要指出的是,有限元分析模型采用的是 Shell63 单元,并非基于欧拉梁弯曲理论的 Beam 单元,Shell63 是分析单轴柔性铰链普遍采用的单元类型<sup>[10]</sup>。两者吻合的程度进一步表明解析计算公式的正确性。

随着  $a$  减小,铰链的转角显著增大,但精度明显变差,而最大应力变化不大。对于高精度微动工作台和精密光学仪器<sup>[13]</sup>,铰链精度是最重要的

设计考虑因素,且微运动条件下应力问题只是一个次要因素。为进一步地比较这几个铰链的优劣,在不考虑最大应力的情况下,本文定义铰链的相对柔度(即转角与精度之比)为:

$$c_r = \theta / v_c \quad (16)$$

该定义的含义是:在不超出材料的弹性范围的情况下,要获得某一给定的转角 $\theta$ ,相对柔度越大的铰链,其传动精度越高(即 $v_c$ 越小)。根据表 1 中的解析计算结果绘制了如图 5 所示的相对柔度曲线。从图中可看出,深切口椭圆柔性铰链的相对柔度比直圆柔性铰链和通常所说的椭圆柔性铰链要大,因而更适合于要求高精度传动的微动工作台和光学仪器。

#### 参考文献:

- [1] 梁大伟,李凌全,曾威.微夹钳传动分析[J].大连理工大学学报,2003,43(4):466-469.  
LIANG D W, LI L Q, ZENG W. Transmission analysis for microgripper[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2003, 43(4): 466-469. (in Chinese)
- [2] YI B J, CHUNG G B, NA H Y. Design and Experiment of a 3-DOF Parallel Micromechanism Utilizing Flexure Hinges[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2003, 19(4): 604-612.
- [3] 王乐锋,荣伟彬,孙立宁.三支链六自由度并联柔性铰微动机器人的研究[J].光学精密工程,2001,9(1):67-70.  
WANG L F, RONG W B, SUN L N. Research on a three-link six-DOF micromanipulator with flexure hinge[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2001, 9(1): 67-70. (in Chinese)
- [4] 孙立宁,马立,荣伟彬,等.一种纳米级二维微定位工作台的设计与分析[J].光学精密工程,2006,14(3):406-411.  
SUN L N, MA L, RONG W B, et al.. Design and analysis on a 2-DOF nanopositioning stage[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(3): 406-411. (in Chinese)
- [5] AHMAD E A. *Optomechanical Engineering Handbook*[M]. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
- [6] 傅翮,周仁魁,周泗忠.同步辐射光束线中柔性铰链

## 4 结 论

本文提出了另一类椭圆柔性铰链——深切口椭圆柔性铰链。研究表明,与直圆铰链和椭圆铰链相比,这类铰链更适合于要求高精度传动的应用场合。推导出了这类柔性铰链柔度、转动精度和最大应力的计算公式,这些公式具有简洁、规范等特点,非常有利于工程设计中的计算和分析。最后,使用有限元方法对此公式进行校核,两者吻合得很好,其中转角的最大误差不超过 4%,最大应力的最大误差不超过 5%,转动精度的最大误差不超过 7%,充分说明这些解析计算公式的正确性。

的研究[J].光学精密工程,2001,9(1):67-70.

- FU X, ZHOU R K, ZHOU S ZH. Flexure hinge in beam line of synchrotron radiation[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2001, 9(1): 67-70. (in Chinese)
- [7] 胡逊,姚汉民.高分辨力高导向精度柔性铰链调焦机构[J].光电工程,1998,25(3):23-26.  
HU S, YAO H M. A flexible hinge focusing mechanism with high resolution and high guide accuracy [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1998, 25(3): 23-26. (in Chinese)
- [8] 吴鹏飞,周兆英.柔性铰链的应用[J].中国机械工程,2002,13(18):1615-1618.  
WU Y F, ZHOU ZH Y. Pplication of flexure hinges [J]. *China Mechanical Engineering*, 2002, 13(18): 1615-1618. (in Chinese)
- [9] SMITH S T, BADAM I V G, DALE J S. Elliptical Flexure Hinges[J]. *Review of Scientific Instruments*, 1997, 68(3): 1474-1483.
- [10] LOBONTIU N. *Compliant mechanisms-Design of Flexure Hinges*[M]. CRC Press, 2002.
- [11] PAROS J M, WEISBORO L. How to design flexure hinges[J]. *Machine Design*, 1965, 37: 151-157.
- [12] 陈贵敏,刘小院,贾建援.椭圆柔性铰链的柔度计算[J].机械工程学报,2006,42(Supp):111-115.  
CHEN G M, LIU X Y, JIA J Y. Compliance calculation of elliptical flexure hinge[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(Supp): 111-115. (in Chinese)

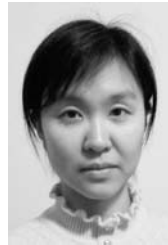
- [13] HAN C S, KIM S H. Three-axis lever actuator with flexure hinges for an optical disk system[J].

*Review of Scientific Instruments*, 2002 (73): 3678-3686.

作者简介:



陈贵敏(1978—),男,内蒙古包头人,副教授,分别于2000年、2003年和2005年在西安电子科技大学获学士、硕士和博士学位,主要从事柔性机构、光机电一体化技术等方面的研究。E-mail: efoxxx@126.com



韩琪(1977—),女,重庆人,硕士,分别于2001和2006年在西安电子科技大学获得学士和硕士学位,主要从事有限元方法、虚拟装配等方面的研究。E-mail: qihan@xidian.edu.cn

●下期预告

## 基于机器视觉的微装配控制策略及软件架构

徐征<sup>1</sup>,王晓东<sup>2</sup>,程新宇<sup>1</sup>,罗怡<sup>1</sup>,王立鼎<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学 辽宁省微纳米技术及系统重点实验室,辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 精密与特种加工教育部重点实验室,辽宁 大连 116024)

针对装配控制和软件架构等微装配重要环节进行了研究,对微装配具体需求、工作流程和人机交互等进行了分析,提出先看后动的微装配控制模式,采用由任务层、策略层和行为层组成的分层控制架构,建立了基于显微机器视觉的微装配平台。围绕可复用性要求,对软件中核心类的结构和对象间关系进行了分析,采用面向对象的聚集关系构造任务层和策略层中的主要对象,最终实现了微装配控制软件。基于本文的控制方法进行了微装配实验,所装配的微系统为微挠性摆动系统,由6个微小零件组成,所有零件上均无人工标记点,装配后对其关键的技术指标进行了测量和对比分析。实验结果表明:自动装配与手动装配的同轴度误差平均值相近,而对称度误差平均值有所改善,自动装配的各项指标不确定度优于手动装配,装配的微系统其一致性有明显改善。本文提出的控制方法可以有效地用于复杂微系统的装配,并且基于分层架构的控制方法及其相应的软件具有较高的人机交互性、鲁棒性和可复用性。